1. Comprobar que el área del cono de ecuación $R\ x = h\sqrt{y^2+z^2}$ con $x \leq h$, $h > 0$ y $R > 0$ es $\pi R\sqrt{h^2+R^2}$.

2. Hallar la mínima distancia del punto $(0,2,1)$ a la curva intersección de la superficie parametrizada por $\vec{\Phi}(u,v) = (u\cos(v), u\ \operatorname{sen}(v), u)$, $u \geq 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$ con el plano $z = 3$. Graficar la curva.

3. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{9-x^2-y^2},\ 0 \leq z \leq 2\}$. Si $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es un campo vectorial del que se sabe que $\vec{F}(x,y,0) = (3x,0,0)$, $\vec{F}(x,y,2) = (3x+2y^2, 2xy^2, -4xy)$ y $\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z) = 3$, calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S indicando en un gráfico la normal utilizada.

4. *a)* Definir línea de campo de un campo vectorial $\vec{F} \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Si $\vec{F}(x,y) = (2xy, -x^2+y^2)$, graficar los vectores tangentes a las líneas de campo de $\vec{F}$ en los puntos $(-1,1)$, $(-2,0)$ y $(-1,-1)$.

   b) Si $\vec{F}$ es el campo del ítem a), hallar una ecuación cartesiana de la línea de campo de $\vec{F}$ que pasa por $(-1,1)$. Graficar.

5. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times \vec{F} = \bar{0}$ en R, calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (\operatorname{sen}(t), 1, \cos(t))$, con t variando desde 0 hasta π.

FIUBA 22-02-11 Análisis Matemático II Integrador - Tema 1

1. Si $A = \{(h, R) \in \mathbb{R}^2 : h \geq 1,\ R \geq 1,\ h^2 + R^2 \leq 16\}$, hallar la altura del cono, h, y el radio, R, restringidos a A para que su área sea mínima y máxima, sabiendo que el área del cono es $\pi R\sqrt{h^2 + R^2}$.

2. Sea C una curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2, 2\,t)$, $0 \leq t \leq 2$. Expresar C como intersección de dos superficies y graficarla. Calcular la circulación de $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x, 3yz)$ a lo largo de C. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?

3. Sea el campo escalar $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función cuadrática tal que $f''(0) = 2$. Si $g(x, y, z) = f(x^2 + y^2 - 2z^2)$, hallar el flujo del ∇g a través de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

4. Sea $\vec{G}(x, y) = (2x^3y + x, -3x^2y^2 - y)$, calcular la línea de campo que pasa por $(1, 1)$. Además hallar la recta ortogonal a la línea del campo anterior, también en el punto $(1, 1)$.

5. Sean $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1,\ -1 \leq y - z \leq 1\}$ y R la región del plana dada por la proyección de W sobre el plano xy. Hallar la circulación de $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy + 3x)$ sobre el borde de R, indicando en un gráfico la orientación elegida. Graficar el conjunto W y la proyección.

1. Dado el campo escalar f definido sobre $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = 1+y$, determinar -si existen- extremos de f sobre la curva plana dada por la ecuación $x^2 - y^3 = 0$.

2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{F}(x,y) = (x-2, y)$. Graficar la familia de trayectorias ortogonales a las líneas de campo de $\vec{F}$ y calcular la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva de esa familia que pasa por el punto $P_0 = (0,0)$ orientada en sentido horario.

3. Calcular $\int\int_D e^{x+2y}\,dx\,dy$, siendo D la región plana descripta por $2 < x + 2y < 4$ en el primer cuadrante. *Sugerencia*: utilizar el cambio de variables $u = x + 2y$, $v = x$.

4. Calcular la circulación de $\vec{G}$ sobre la curva borde de la superficie descripta por $z = 4x^2 + y^2$ con $z \leq 4$ sabiendo que $rot(\vec{G})(x,y,z) = (h(x,y), z\,h(x,y), zy^2)$, siendo h un campo escalar continuo en $I\!R^2$. Indicar gráficamente la orientación elegida para el cálculo de la circulación. ¿Dónde utilizó que el campo h es continuo?

5. Calcular el flujo del campo vectorial definido sobre $\mathbb{R}^3$ por $\vec{F}(x,y,z) = (xz - z, \operatorname{sen}(x^3z^2) - yz, 1 + y)$ a través de la superficie descripta por $z = x^2 - y^2$ con $0 \leq z$ y $0 \leq x \leq 1$, orientada de forma tal que $\hat{n} \cdot (0,0,1) > 0$.

1. a) Hallar la solución de la ecuación diferencial $y' + xy = 2x$ con condición inicial $y(0) = 1$.

   b) Hallar un campo vectorial de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, de modo tal que sus líneas de campo estén descriptas por la ecuación diferencial del ítem anterior.

2. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x,y) = (\sqrt{2+x^4} - y^2, x^2 + \sqrt{2+y^4})$ a lo largo del perímetro de la región plana descripta por: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $|x| \leq y$. Indicar en un gráfico el sentido elegido para calcular la circulación.

3. Sean los puntos A, B y $C \in \mathbb{R}^3$, el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ determinado por dichos puntos y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y continuo. Si la circulación del campo sobre el segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ es igual a $2(a - b^2)$ y la circulación sobre el segmento $\overrightarrow{AC}$ es igual a $\frac{1}{2}a^2 + b + ab$, encontrar valores a, $b \in \mathbb{R}$ para que la circulación del campo sobre el segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ sea mínima. Graficar el triángulo con las orientaciones indicadas.

4. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x,y,z) = (-yz, \operatorname{sen}(y), xy + e^z)$ sobre las curvas que forman el borde de la superficie descripta por $x^2 + z^2 = 1$, con $z - 2 \leq y \leq z + 2$ orientada con la normal alejándose del eje del cilindro.

5. Calcular el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = (2x, -y, 1)$ a través de la porción de la superficie esférica descripta por: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, con $z \geq -\frac{\sqrt{5}}{2}$, sabiendo que la normal a la superficie en el punto $(2, 0, 1)$ tiene componente z positiva.

1. Dada $\vec{F}(x,y) = (4yg(x), 2xg(x) + 8y - 16)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞. Sabiendo que $\vec{F}$ admite función potencial ϕ, que $\vec{F}(1,2) = (16,4)$ y que $\phi(0,0) = 3$, hallar y graficar el conjunto de nivel 3 de ϕ.

2. Calcular la masa del sólido cuya densidad volumétrica está dada por $\delta(x,y,z) = |3y|$ sabiendo que el sólido está descripto, en coordenadas cilíndricas, por las inecuaciones: $-4+r^2 \le z \le 2-r$. Graficar el sólido.

3. Sean $\vec{F}(x,y,z) = (xz - 5\,\text{sen}(y), h(x,z), z)$ con h un campo escalar definido en $\mathbb{R}^2$ de clase C^∞ y $\mathcal{C}$ la curva obtenida de la intersección de las superficies de ecuaciones $y = \sqrt{x^2 + 4z^2}$ e $y = 6 - x^2 - 4z^2$. Calcular la circulación del campo sobre la curva $\mathcal{C}$ indicando en un gráfico la orientación elegida.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Hallar el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (f(z) + y^2 - y, 3x, 2z)$ a través de la superficie determinada por:
$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ 0 \le y \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases}$$
Considerar la normal a la superficie con coordenada z negativa.

5. Sea f un campo escalar de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ y su polinomio de Taylor de segundo orden en el punto $(1,2)$ es $p(x,y) = 28 - 14x - 17y + 2x^2 + 3y^2 + 5xy$. Calcular el área de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 2, f(1,2))$.

1. Hallar el flujo del campo $\nabla \times \vec{F}$ a través de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ limitada por $z \leq 3$ siendo el campo $\vec{F}(x, y, z) = (0, x\,y^2, 0)$. Indicar la normal utilizada para el cálculo del flujo.

2. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de área 3, $(0,0) \notin D$. Hallar el área de la superficie S de ecuación $z = 1 + 4\sqrt{x^2 + y^2}$, con $(x, y) \in D$.

3. Calcular el máximo absoluto de $f(x, y, z) = \dfrac{1}{4}x^2 + y^2 + (z-1)^2$ sobre la curva definida por la intersección de las superficies: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 2 - x^2 - y^2$, e indicar los puntos (x, y, z) donde se alcanza dicho máximo.

4. Sea $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$; $\vec{F} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{F} \in C^1$ en su dominio.
Si $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y) = 5$ para todo (x, y) en su dominio, calcular $\oint_{C+} \vec{F} \cdot d\bar{l}$ siendo C una circunferencia con centro en el origen y radio $R > 1$, sabiendo además que para $R = 1$ el valor de dicha circulación es $3\,\pi$.

5. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (-2x + e^{-y^2}, y, z)$ a través de la porción de área finita de la superficie $z = \sqrt{36x^2 + 100y^2}$ limitada por el plano normal a la curva parametrizada por $\vec{\gamma}(t) = (4, 4 - 4t^2, t + 8)$, $t \in [-4, 4]$ en el punto $(4, 0, 9)$. Considerar la normal de componente z negativa.

1. Sean las superficies:

   $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2+y^2,\ z \leq 8-y^2\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 8-y^2,\ z \geq 2x^2+y^2\}$, ambas orientadas con vectores normales de componente z positiva. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ a través de la superficie S_1, sabiendo que el flujo del campo mencionado a través de la superficie S_2 es 6π y que $\nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = 3$.

2. Sean $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + 2\sqrt{xy}\}$, Π el plano tangente a S en el punto $A = (1,1,3)$ y T un trozo del plano tangente, $T = \{(x,y,z) \in \Pi : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. Calcular el área de T.

3. Hallar la masa de un alambre cuya forma coincide con la curva intersección de las superficies definidas por las ecuaciones $z = x^2+y^2$ y $z = 2x$, en el primer octante, entre los puntos $(2,0,4)$ y $(1,1,2)$ sabiendo que su densidad lineal de masa es $\delta(x,y,z) = |(x-1)y|$.

4. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y\,x + y\,x\,g(x) + 3z, g(x), 3x)$.

   a) Hallar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ que satisfaga $g(0) = -1$ y tal que $\vec{F}$ sea conservativo en $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$, donde C es la curva parametrizada por:
   $\vec{\gamma}(t) = (2, -cos(t), sen(t))$, $0 \leq t \leq \pi$.

5. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que el flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de S sea igual al área de S, siendo $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 5\}$, orientada con el campo de normales de componente z negativa y $\vec{F}(x,y,z) = a\,(y,z,-x)$.

1. *a*) Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$, $F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$. Probar que:

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{\partial(M,N,P)}{\partial(x,y,z)} \quad \text{es una matriz simétrica.}$$

   b) Hallar la circulación de $\vec{F}(x,y,z) = (-y+z, -x+z, x+y)$ a través de la curva parametrizada por:

$$\vec{\gamma}(t) = (e^{t(\pi-t)}, 1 + log[1 + sen(t)], 1 + \frac{t}{\pi}),\ \ 0 \leq t \leq \pi,$$

   orientada con t creciente.

2. *a*) Sean $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ y $\vec{G}(x,y) = (-Q(x,y), P(x,y))$. Probar que las líneas de campo de $\vec{F}$ son ortogonales a las líneas de campo de $\vec{G}$ en los puntos de intersección.

   b) Encontrar la familia de curvas ortogonales a las líneas de campo de $\vec{F}(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$.

3. Hallar valores a y b sujetos a $a+b=2$ con $0{,}25 \leq a \leq 1{,}5$ de modo tal que la circulación del campo $\vec{F}(x,y) = (0,x)$ a través de la curva C tome valores máximo y mínimo absolutos, siendo C el perímetro del triángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,b)$ orientado positivamente.

4. Dada la integral iterada

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_{x^2+y^2-4}^{0} dz\, dx\, dy$$

   a) Graficar el sólido cuyo volumen se calcula con la integral dada.

   b) Calcular dicho volumen en un sistema de coordenadas conveniente.

5. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua. Hallar la circulación del campo $\vec{F}(x,y,z) = (y + g(x), -x + z, -y + g(z))$ a través de la curva intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 16 - 3x^2 - 3y^2$. Indique en un gráfico la orientación elegida.

1. Sea C la curva intersección de las superficies $z = ax + by$ y $x^2 + y^2 = 1$. Hallar números reales a y b tales que:
$$\int_C y\,dx + (z - x)\,dy - y\,dz = 0.$$

2. Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x, y, z) = 5\,x^2 + 8\,y^2 + 4\,z^2$ sobre la curva definida por las ecuaciones $x = z$ y $4\,y^2 + 9\,z^2 = 1$.

3. Calcular el área de la superficie definida por la ecuación $x^2 + z^2 - 2z = 0$ limitada por $|y| \leq z$.

4. Hallar una expresión en coordenadas cartesianas de las líneas de campo de:
$$\vec{F}(x, y) = (2x + y, x - 2y).$$

5. Sean f un campo escalar de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $W \subset \mathbb{R}^3$ el sólido determinado por las inecuaciones:
$$\begin{array}{rcl} 9 & \leq & x^2 + y^2 + z^2 \quad \leq \quad 16 \\ z & \geq & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$
Calcular:
$$\int\int_S \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial \breve{n}}\,dS\,,$$
sabiendo que S es la superficie borde de W, $\breve{n}$ es el versor normal a S (saliente de W) y $\nabla^2 f(x, y, z) = 3$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.